



DI Dr. techn. Klaus LEEB  
klaus.leeb@schule.at

## "Hydrodynamik - Leistung einer Pumpe"



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**
  - Lösen einer transzendenten Gleichung ("Formel von Colebrook"):**  
*Transzendente Gleichung: Gleichung, die sich nur in impliziter Form darstellen lässt.  
Lösungen können numerisch oder graphisch, jedoch nicht analytisch gefunden werden*
  
- **Kurzzusammenfassung**
  - Bestimmung der Pumpenleistung einer Wasserversorgungsanlage**
  
  - Anwendung der Energiegleichung mit Verlusten und zugeführter Arbeit:**  
**"allgemeine Bernoulli-Gleichung"**
  
- **Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:**
  - 1) Verluste in Rohrleitungen**
  - 2) Bernoulli-Gleichung**
  - 3) Formel von Colebrook**
  - 4) Verluste durch Einbauten in Rohrleitungen**
  
  - Zeitaufwand: Ein gut vorbereiteter Schüler dürfte für diese Berechnung - ohne  
Formatierung und Kommentare - in etwa 1 1/2 h benötigen.**
  
- **Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):**
  - Strömungsmaschinen, Abteilung für Maschineningenieurwesen**
  
- **Mathcad-Version:           Mathcad 14**
  
- **Literaturangaben:**
  - Willi Bohl "Strömungsmaschinen 1", Vogel-Buchreihe ISBN: 3 - 8023 - 1527 - 8**
  - Steger "Technische Mechanik 2" Teubner-Verlag, ISBN: 3 - 519 - 16731 - X**
  
- **Anmerkungen bzw. Sonstiges:**
  -

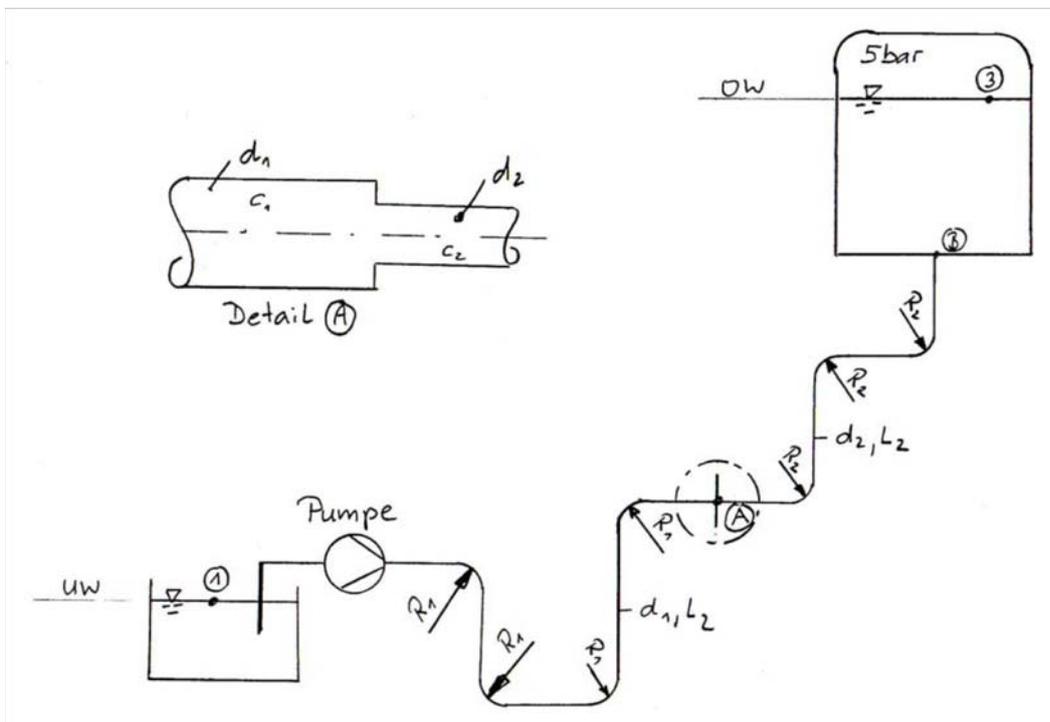


## Bestimmung der Leistung einer Kreiselpumpe

### Auslegung einer Wasserleitung mit Pumpe und Druckbehälter:

Eine Kreiselpumpe soll 7 m<sup>3</sup>/min Wasser von 20°C durch eine Stahlrohrleitung mit 0.05 mm Rauigkeit in einen 15m höher gelegenen Behälter fördern, der unter einem Überdruck von 5 bar steht. Die Rohrleitung 1 (von Unterwasser "UW" bis zur un stetigen Verengung im Punkt A) besteht aus einem 1.2km langen Rohr von 260mm Durchmesser mit 4 glatten 90°-Krümmern von 500mm Krümmungsradius. Nach der un stetigen Verengung im Punkt A schließt sich das Rohr 2 an - mit 180mm Durchmesser und 3 rauen 90° Krümmern von 700 mm Radius.

- a) Die Energiegleichung bzw. die "allgemeine Bernoulli-Gleichung" ist aufzustellen
- b) Berechnen Sie die Verluste in der Rohrleitung 1
- c) Berechnen Sie die Verluste in der Rohrleitung 2
- d) Berechnen Sie die Verluste der un stetigen Verengung im Punkt A
- e) Berechnen Sie den Austrittsverlust im Punkt B
- f) Ermitteln Sie den Gesamtverlust in der Rohrleitung
- g) Die erforderliche Pumpenleistung bei einem Pumpenwirkungsgrad von 89%



<b>Angaben:</b> Volumenstrom	$V_{\text{Punkt}} := 7 \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$	$p_1 := 1 \cdot \text{bar}$	$p_3 := 5 \cdot \text{bar} + 1 \cdot \text{bar}$	"Überdruck!"
Rohr 1: Durchmesser, Länge und Wandrauigkeit	$d_1 := 260 \cdot \text{mm}$	$L_1 := 1.2 \cdot \text{km}$	$k_1 := 0.05 \cdot \text{mm}$	
Krümmer	$R_1 := 500 \cdot \text{mm}$			
Rohr 2: Durchmesser, Länge und Wandrauigkeit	$d_2 := 180 \cdot \text{mm}$	$L_2 := 900 \cdot \text{m}$	$k_2 := 0.05 \cdot \text{mm}$	
Krümmer	$R_2 := 500 \cdot \text{mm}$			
Wirkungsgrad der Pumpe	$\eta_{\text{Pumpe}} := 89 \cdot \%$	Höhendifferenz UW-OW	$h_{13} := 15 \cdot \text{m}$	

## a) Die Energiegleichung: angesetzt zwischen Unterwasser "UW" und Oberwasser "OW" (Punkt 1 und Punkt 3)

$$E_3 = E_1 + E_{zu} - E_{ab} \quad \text{"Die Energie am Ende eines Vorganges ist gleich der Energie am Anfang eines Vorganges vermehrt um die zugeführte Energie und vermindert um die abgeführte Energie"}$$

$$E_3 = \frac{p_3}{\rho \cdot g} + \frac{c_3^2}{2 \cdot g} + z_3 \quad \text{...die Energie am Punkt 3}$$

$$E_1 = \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{c_1^2}{2 \cdot g} + z_1 \quad \text{...die Energie am Punkt 1}$$

$$E_{zu} = H_{Pumpe} \quad \text{...die zugeführte Pumpenförderhöhe}$$

$$E_{ab} = \Sigma \Delta h_v \quad \text{...Summe aller Verluste zwischen 1 und 3 (Rohrreibungsverluste, Krümmer, stetige Verengung und plötzliche Erweiterung)}$$

$$\frac{p_3}{\rho \cdot g} + \frac{c_3^2}{2 \cdot g} + z_3 = \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{c_1^2}{2 \cdot g} + z_1 + H_{Pumpe} - \Sigma \Delta h_v \quad \text{(hier sind die Geschwindigkeiten } c_1 \text{ und } c_3 \text{ annäherung null, da es sich um große Wasseroberflächen handelt)}$$

$$H_{Pumpe} = \frac{p_3}{\rho \cdot g} + \frac{c_3^2}{2 \cdot g} + z_3 - \left( \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{c_1^2}{2 \cdot g} + z_1 \right) + \Sigma \Delta h_v \quad \text{nach kurzer Umformung}$$

$$H_{Pumpe} = \frac{p_3 - p_1}{\rho \cdot g} + h_{13} + \Sigma \Delta h_v \quad \text{mit } z_3 - z_1 = h_{13}$$

gesucht ist Leistung der Pumpe (kann mit der Förderhöhe  $H_{Pumpe}$  der Pumpe bestimmt werden)

$$P_{Pumpe} = \frac{\rho \cdot g \cdot V_{Punkt} \cdot H_{Pumpe}}{\eta_{Pumpe}} \quad \text{erforderliche Pumpenleistung}$$

## b) Verluste in der Rohrleitung 1

Rohrreibungsverlust  $\Delta h_{v\_Rohr1} = \zeta_{Rohr1} \cdot \frac{c_1^2}{2 \cdot g}$   $\zeta_{Rohr1} = \lambda_{Rohr1} \cdot \frac{L_1}{d_1}$

$\zeta_{Rohr1}$  ....Rohrreibungsbeiwert im Rohr 1 bezogen auf die Geschwindigkeitshöhe im Rohr1

$\lambda_{Rohr1}$  ...Rohrreibungszahl im Rohr 1 (abhängig von der Rauigkeit des Rohres und der Reynoldszahl Re)

Formel von "Colebrook" 
$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \cdot \lg \left( \frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{0.27}{\frac{d}{k}} \right)\right)^2}$$

Reynoldszahl  $Re = \frac{c \cdot d}{\nu}$

dynamische Viskosität des Wassers bei 20°C

$$\nu := 1.0 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{m^2}{s}$$

Aus "Steger 2: Technische Mechanik, Tab 4.3 S288, 4.Auflage, Teubner"

Dichte des Wassers

$$\rho_{Wasser} := 998.2 \cdot \frac{kg}{m^3}$$

Die Geschwindigkeit im Rohr 1:

Kontinuitätsgleichung

$m_{Punkt} = \rho \cdot c \cdot A$  oder

$V_{Punkt} = c \cdot A$

$$c_1 := \frac{V_{Punkt}}{\left(\frac{d_1^2 \cdot \pi}{4}\right)}$$

$$c_1 = 2.197 \frac{m}{s}$$

$$Re_1 := \frac{c_1 \cdot d_1}{\nu}$$

$$Re_1 = 5.713 \times 10^5$$

Die Rohrreibungszahl  $\lambda_{Rohr1}$

Schätzwert

$\lambda_{Rohr1} := 0.1$

Vorgabe

$$\lambda_{Rohr1} = \frac{1}{\left(2 \cdot \lg \left( \frac{2.51}{Re_1 \cdot \sqrt{\lambda_{Rohr1}}} + \frac{0.27}{\frac{d_1}{k_1}} \right)\right)^2}$$

$\lambda_{Rohr1} := \text{Suchen}(\lambda_{Rohr1})$

$$\lambda_{Rohr1} = 0.015$$

Rohrreibungsverlust

$$\zeta_{Rohr1} := \lambda_{Rohr1} \cdot \frac{L_1}{d_1}$$

$$\zeta_{Rohr1} = 70.082$$

Rohrreibungsverlust im Rohr 1

$$\Delta h_{v\_Rohr1} := \zeta_{Rohr1} \cdot \frac{c_1^2}{2 \cdot g}$$

$$\Delta h_{v\_Rohr1} = 17.253 \text{ m}$$

Verluste in den Krümmern  $\Delta h_{v\_Krümmer1} = \zeta_{K1} \cdot \frac{c_1^2}{2 \cdot g}$   $\frac{R_1}{d_1} = 1.923$  glatter Rohrkrümmer

Widerstandsbeiwert  $\zeta_{K1} := 0.3$  Aus "Steger 2: Technische Mechanik, Tab 4.108 S341, 4.Auflage, Teubner"

Verlust in einem Krümmer  $\Delta h_{v\_Krümmer1} := \zeta_{K1} \cdot \frac{c_1^2}{2 \cdot g}$   $\Delta h_{v\_Krümmer1} = 0.074 \text{ m}$

Daraus ergeben sich die Verluste im Rohr 1:

$\Delta h_{Rohr1\_ges} := \Delta h_{v\_Rohr1} + 4 \cdot \Delta h_{v\_Krümmer1}$   $\Delta h_{Rohr1\_ges} = 17.549 \text{ m}$

### c) Verluste in der Rohrleitung 2:

"analog zu Rohr1"

$c_2 := \frac{V_{\text{Punkt}}}{\left(\frac{d_2^2 \cdot \pi}{4}\right)}$   $c_2 = 4.585 \frac{\text{m}}{\text{s}}$   $Re_2 := \frac{c_2 \cdot d_2}{\nu}$   $Re_2 = 8.252 \times 10^5$

Die Rohrreibungszahl  $\lambda_{Rohr2}$  Schätzwert  $\lambda_{Rohr2} := 0.1$

Vorgabe  $\lambda_{Rohr2} = \frac{1}{\left(2 \cdot \log\left(\frac{2.51}{Re_2 \cdot \sqrt{\lambda_{Rohr2}}} + \frac{0.27}{\frac{d_2}{k_2}}\right)\right)^2}$   $\lambda_{Rohr2} := \text{Suchen}(\lambda_{Rohr2})$   $\lambda_{Rohr2} = 0.016$

Rohrreibungsverlust  $\zeta_{Rohr2} := \lambda_{Rohr2} \cdot \frac{L_2}{d_2}$   $\zeta_{Rohr2} = 78.014$

Rohrreibungsverlust im Rohr 2  $\Delta h_{v\_Rohr2} := \zeta_{Rohr2} \cdot \frac{c_2^2}{2 \cdot g}$   $\Delta h_{v\_Rohr2} = 83.608 \text{ m}$

Verluste in den Krümmern  $\frac{R_2}{d_2} = 2.778$  rauher Rohrkrümmer

Widerstandsbeiwert  $\zeta_{K2} := 0.265$  Aus "Steger 2: Technische Mechanik, Tab 4.108 S341, 4.Auflage, Teubner"

Verlust in einem Krümmer  $\Delta h_{v\_Krümmer2} := \zeta_{K2} \cdot \frac{c_2^2}{2 \cdot g}$   $\Delta h_{v\_Krümmer2} = 0.284 \text{ m}$

Daraus ergeben sich die Verluste im Rohr 1:

$\Delta h_{Rohr2\_ges} := \Delta h_{v\_Rohr2} + 3 \cdot \Delta h_{v\_Krümmer2}$   $\Delta h_{Rohr2\_ges} = 84.46 \text{ m}$

### d) Die Verluste der un stetigen Verengung im Punkt A

$$\Delta h_{v\_Verengung} = \zeta_{Verengung} \cdot \frac{c_2^2}{2 \cdot g}$$

Abhängig von  $A_2/A_1$

$$\frac{\frac{d_2^2 \cdot \pi}{4}}{\left(\frac{d_1^2 \cdot \pi}{4}\right)} = 0.479$$

Widerstandsbeiwert der Verengung

$$\zeta_{Verengung} := 0.3$$

Aus "Steger 2: Technische Mechanik, Tab 4.108 S341, 4.Auflage, Teubner"

$$\Delta h_{v\_Verengung} := \zeta_{Verengung} \cdot \frac{c_2^2}{2 \cdot g}$$

$$\Delta h_{v\_Verengung} = 0.322 \text{ m}$$

### e) Berechnen Sie den Austrittsverlust im Punkt B

Beim Eintritt in einen großen Behälter wird die gesamte Geschwindigkeitsenergie des Wasserstrahles verwirbel  
Daher ist der Widerstandsbeiwert 1

$$\Delta h_{\text{Austritt}} = \zeta_{\text{Austritt}} \cdot \frac{c_2^2}{2 \cdot g}$$

$$\zeta_{\text{Austritt}} := 1$$

$$\Delta h_{\text{Austritt}} := \zeta_{\text{Austritt}} \cdot \frac{c_2^2}{2 \cdot g}$$

$$\Delta h_{\text{Austritt}} = 1.072 \text{ m}$$

### f) Der Gesamtverlust in der Rohrleitung zw "UW" und OW"

$$\Sigma \Delta h_v := \Delta h_{\text{Rohr1\_ges}} + \Delta h_{v\_Verengung} + \Delta h_{\text{Rohr2\_ges}} + \Delta h_{\text{Austritt}}$$

$$\Sigma \Delta h_v = 103.402 \text{ m}$$

dies entspricht einem Druckverlust von:  $p = \rho \cdot g \cdot h$

$$\Delta p_v := \rho_{\text{Wasser}} \cdot g \cdot \Sigma \Delta h_v$$

$$\Delta p_v = 10.122 \cdot \text{bar}$$

### g) Die erforderliche Pumpenleistung bei einem Pumpenwirkungsgrad von 89%

$$H_{\text{Pumpe}} := \frac{p_3 - p_1}{\rho_{\text{Wasser}} \cdot g} + h_{13} + \Sigma \Delta h_v$$

$$H_{\text{Pumpe}} = 169.48 \text{ m}$$

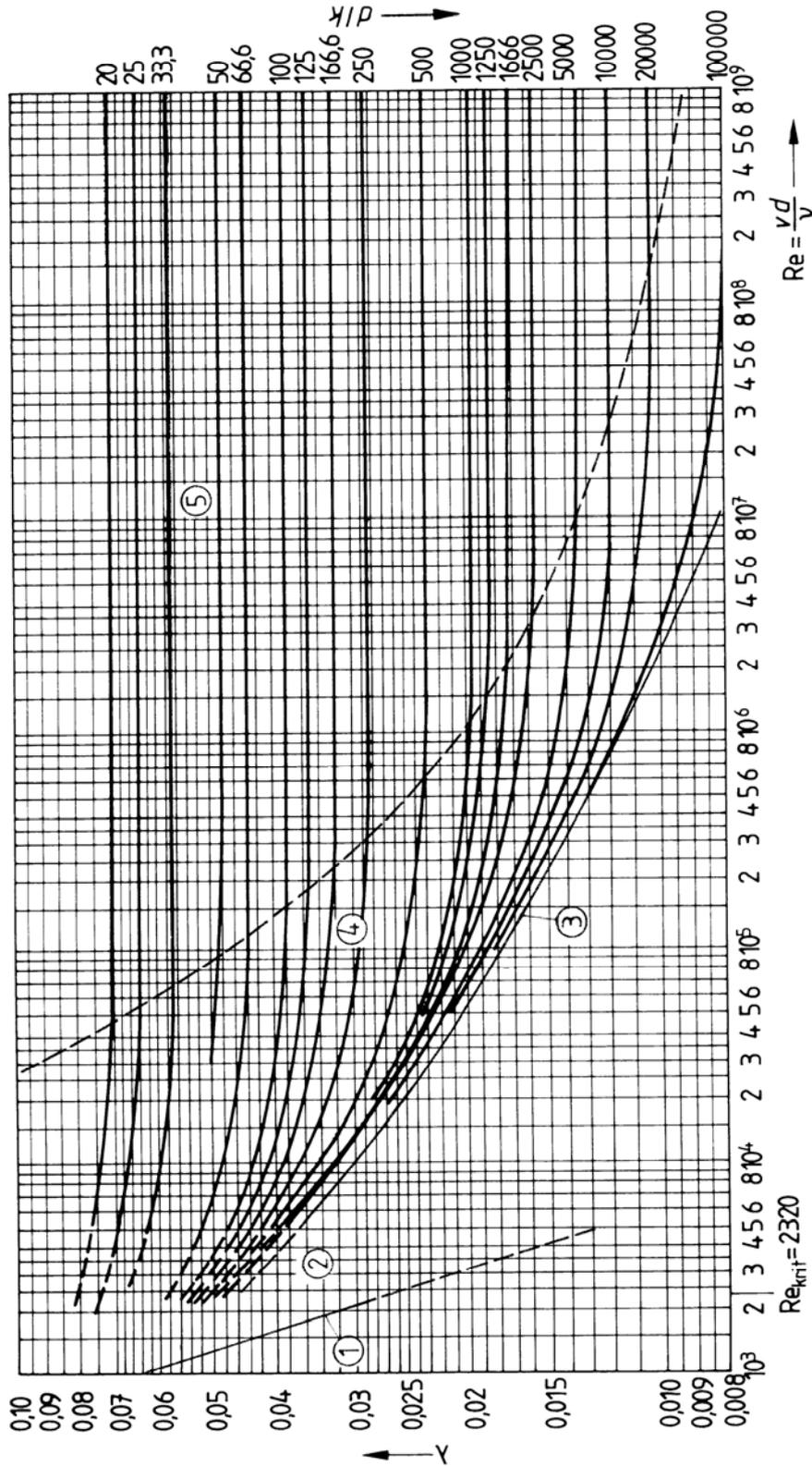
erforderliche Pumpenförderhöhe

gesucht ist Leistung der Pumpe (kann mit der Förderhöhe  $H_{\text{Pumpe}}$  der Pumpe bestimmt werden)

$$P_{\text{Pumpe}} := \frac{\rho_{\text{Wasser}} \cdot g \cdot V_{\text{Punkt}} \cdot H_{\text{Pumpe}}}{\eta_{\text{Pumpe}}}$$

erforderliche Pumpenleistung

$$P_{\text{Pumpe}} = 217.477 \cdot \text{kW}$$



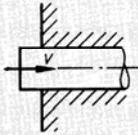
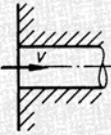
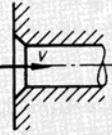
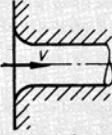
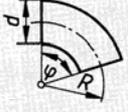
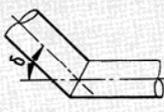
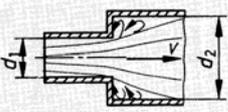
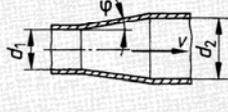
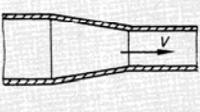
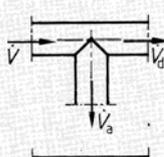
Rohre im Übergangsbereich  $\left(65 \frac{d}{k} < Re < 1300 \frac{d}{k}\right)$ . Für diesen Bereich ist  $\lambda$  eine Funktion von  $Re$  und  $d/k$ . Eine gute Näherung ist die

Formel von Colebrook  $\lambda = \frac{1}{\left[2 \lg \left( \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{0,27}{d/k} \right)\right]^2}$

Gl. (4.67)

- ① laminar  $\lambda = 64/Re$  Gl.(4.62)
- ② laminar-turbulenter Übergangsbereich
- ③ turbulent (hydraulisch glattes Rohr) Gl.(4.65)
- ④ Übergangsbereich glatt-rauh Gl.(4.67)
- ⑤ voll ausgebildete Rauheitsströmung Gl.(4.68)

Tabelle 4.108 Widerstandsbeiwerte

														
	hineinragendes Rohr $\zeta_e = 1$ bis 3	scharfkantiges Rohr $\zeta_e = 0,5$	gebrochene Eintrittskante $\zeta_e = 0,25$	gerundete Eintrittskante $\zeta_e = 0,05 - 0,1$										
<b>Kreiskrümmen</b> 	$\varphi = 90^\circ$					für $\varphi \neq 90^\circ$ : $\zeta = k \zeta_{90^\circ}$								
	$R/d$	1	2	4	6	10	$\varphi$	30°	60°	120°	150°	180°		
	$\zeta_{90^\circ}$	glatt	0,22	0,14	0,11	0,09	0,10	$k$	0,4	0,7	1,25	1,5	1,7	
		rau	0,51	0,30	0,23	0,18	0,20							
<b>Segmentkrümmen</b> 	$\varphi$	30°	45°	60°	90°									
	$\zeta$	0,10	0,15	0,20	0,25									
<b>Kniestücke</b> 	$\delta$	22,5°	30°	45°	60°	90°	mit Rechteckquerschnitt:							
		glatt	0,07	0,11	0,24	0,47	1,13	$\delta$	30°	45°	60°	75°	90°	
	$\zeta$	rau	0,11	0,17	0,32	0,68	1,27	$\zeta$	0,15	0,52	1,08	1,48	1,60	
<b>unstetige Erweiterung</b> 	$\zeta_e = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2$	<b>unstetige Verengung</b>				$A_2/A_1$	0,2	0,5	0,8	1,0				
			$d_1$	$d_2$		$d_1$	$d_2$	$\zeta$	0,45	0,3	0,13	0		
<b>stetige Erweiterung</b> 	$\varphi$	$\frac{d_2}{d_1}$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	<b>stetige Verengung</b> $\zeta_e = 0,05$						
	4°		0	0,1	0,4	0,7	1,3							
	6°		0	0,2	0,6	1,2	2,0							
	8°		0	0,3	0,8	1,7	2,7							
	10°		0,1	0,4	1,1	2,2	3,5							
<b>Abzweigung</b> 	$\frac{\dot{V}_a}{\dot{V}}$	90° $\zeta_a$	$\zeta_d$	45° $\zeta_a$	$\zeta_d$	<b>Vereinigung</b>								
	0	0,95	0,04	0,90	0,04	90° $\zeta_a$	$\zeta_d$	45° $\zeta_a$	$\zeta_d$	0	-1,2	0,04	-0,92	0,04
0,2	0,88	-0,08	0,68	-0,06	0,2	-0,4	0,17	-0,38	0,17	0,2	-0,4	0,17	-0,38	0,17
0,4	0,89	-0,05	0,50	-0,04	0,4	0,08	0,30	0,00	0,19	0,4	0,08	0,30	0,00	0,19
0,6	0,95	0,07	0,38	0,07	0,6	0,47	0,41	0,22	0,09	0,6	0,47	0,41	0,22	0,09
0,8	1,10	0,21	0,35	0,20	0,8	0,72	0,51	0,37	-0,17	0,8	0,72	0,51	0,37	-0,17
1,0	1,28	0,35	0,48	0,33	1,0	0,91	0,60	0,37	0,54	1,0	0,91	0,60	0,37	0,54

**Tabelle 4.3 Dichte, dynamische und kinematische Viskosität von Wasser bei unterschiedlicher Temperatur**

Temperatur in °C	Dichte $\rho$ in kg/m <sup>3</sup>	dynamische Viskosität $\eta$ in 10 <sup>6</sup> Ns/m <sup>2</sup>	kinematische Viskosität $\nu$ in 10 <sup>6</sup> m <sup>2</sup> /s
0	999,8	1,78	1,78
2	999,9	1,65	1,65
4	1000,0	1,56	1,56
6	999,9	1,46	1,46
8	999,8	1,35	1,35
10	999,7	1,30	1,30
12	999,4	1,22	1,22
14	999,2	1,14	1,14
16	998,9	1,08	1,08
18	998,5	1,02	1,02
20	998,2	1,00	1,00
30	995,7	0,80	0,80
40	992,2	0,65	0,66
50	988,0	0,56	0,57
60	983,2	0,47	0,48
70	977,8	0,40	0,41
80	971,8	0,35	0,36
90	965,3	0,31	0,32
100	958,4	0,28	0,29

**Tabelle 4.102 Wandrauigkeiten verschiedener Rohrarten**

Werkstoff und Rohrart	Zustand der Rohre	$k$ in mm
neue gezogene und gepreßte Rohre aus Cu, Ms, Bronze, Al, anderen Leichtmetallen, Glas, Kunststoff	technisch glatt	0,001 bis 0,0015
neue nahtlose Stahlrohre, gewalzt oder gezogen	mit Walzhaut gebeizt bei engen Rohren	0,02 bis 0,06 0,03 bis 0,04 bis 0,1
neue längsgeschweißte Stahlrohre	mit Walzhaut	0,04 bis 0,1
neue Stahlrohre mit Überzug	Metallspritzüberzug tauchverzinkt handelsüblich verzinkt bitumiert zementiert galvanisiert	0,08 bis 0,09 0,07 bis 0,1 0,1 bis 0,16 ~0,05 ~0,18 ~0,008
gebrauchte Stahlrohre	gleichmäßige Rostnarben leichte Verkrustung mittlere Verkrustung starke Verkrustung	~0,15 0,15 bis 0,4 ~1,5 2,0 bis 4,0
Gußeisenrohre, neue Leitungen mit Flansch oder Muffenverbindung	inwendig bitumiert neu angerostet verkrustet	0,12 0,25 bis 1 1,0 bis 1,5 1,5 bis 3
Betonrohre neu	handelsüblicher Glattstrich handelsüblich mittelglatt handelsüblich rau	0,3 bis 0,8 1,0 bis 2,0 2,0 bis 3,0
Betonrohre nach mehrjährigem Betrieb mit Wasser		0,2 bis 0,3